กระบวนการสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง เลขยกกำลัง ในชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิด

Processes of 11th Grade Students' Mathematical Concept Formation of Exponents in Classroom using Open Approach

นลินทิพย์ วงษาพัด[1], เกียรติ แสงอรุณ[2], สมควร สีชมภู[3]
Nalintip Vongsapat[1], Kiat Sangaroon[2], Somkuan Srichompoo[3]

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษากระบวนการสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง เลขยกกำลัง ในชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิด กลุ่มเป้าหมายของการวิจัย คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2557 จำนวน 6 คน โรงเรียนผดุงนารี จังหวัดมหาสารคาม วิเคราะห์ข้อมูลด้วยการวิเคราะห์โพรโทคอลการแก้ปัญหาของนักเรียน โพรโทคอลการสัมภาษณ์นักเรียนและผลงานนักเรียน โดยอาศัยกรอบแนวคิดของ Mangal มาใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการวิจัยพบว่า ในชั้นเรียนที่จัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการแบบเปิดพบกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง เลขยกกำลัง ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้ 1) การรับรู้ นักเรียนรับรู้ปัญหาผ่านการอ่านสถานการณ์ปัญหาร่วมกับสื่อหรือการคำนวณเชิงสัญลักษณ์และวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาอย่างคร่าว ๆ ทำให้นักเรียนได้รับข้อมูลเพื่อนำมาใช้ในการวิเคราะห์คุณสมบัติร่วมของเลขยกกำลัง 2) การทำให้เป็นนามธรรม นักเรียนสังเคราะห์คุณสมบัติร่วมระหว่างเลขยกกำลัง และ 3) การทำให้เป็นกฎเกณฑ์ทั่วไป นักเรียนสรุปหรือสร้างนิยาม หลักการ กฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ซึ่งแสดงแทนคุณสมบัติร่วมระหว่างเลขยกกำลังทำให้เกิดเป็นความคิดรวบยอด

คำสำคัญ : ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์, วิธีการแบบเปิด

[1] นักศึกษาระดับปริญญาโท หลักสูตรศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น เบอร์โทรศัพท์ 095 - 5061181 (Nalintipkku@gmail.com)

[2] ผู้ช่วยศาสตราจารย์ อาจารย์ที่ปรึกษา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น (skiat@kku.ac.th)

[3] อาจารย์ สาขาวิชาคณิตศาสตรศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น (srichompoo_crme@ kku.ac.th)

[1] Master of Education in Science and Technology, Faculty of Education, Khon Kaen University.

[2] Asst. Prof Department of Mathematics, Faculty of Science, Khon Kaen University.

[3] Teacher, Center for Research in Mathematics Education, Faculty of Education, Khon Kaen University.

Abstract

The purpose of this research was to study the processes of 11th grade students' mathematical concept formation of exponents while in the classroom and using an open approach. The target group consisted of six 11th grade students studying during the second semester of the 2014 school year at Phadungnaree School in Maha Sarakham province. Mangal's framework was used for data analysis based on the protocol of students' activities in the classroom using the Open Approach.

The results found all 3 phases of students' mathematical concept formation of exponents as follows: 1) Perception - students recognize the problem through reading situations and operate with instruction media or symbolic computation; they analyze the problem and receive information to be used in their analysis of the common properties of an exponent. 2) Abstraction - students synthesize a common property of exponents and 3) Generalization - students could generalize or form some mathematical definition, mathematical principles or mathematical rules about the common properties of exponents.

Keywords : Mathematical concept, Open Approach

บทนำ

ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการเรียนรู้คณิตศาสตร์และการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในการแก้ปัญหา นักเรียนที่มีความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ดีมักจะสามารถเรียนรู้และแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ดีรวมทั้งมีพื้นฐานที่จะเชื่อมโยงและคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ในระดับสูงได้ดีด้วย อาจกล่าวได้ว่าความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญต่อประสิทธิภาพการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียน (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2555) จะเห็นว่านักเรียนที่มีความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ดีมักจะเป็นผู้ที่มีความรู้ความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์อย่างถ่องแท้ สามารถอธิบายความรู้เหล่านั้นได้อย่างชัดเจนและสามารถนำความรู้เหล่านั้นไปแก้ปัญหาได้อย่างสมเหตุสมผล (อัมพร ม้าคะนอง, 2552) เนื่องจากปัญหาทางคณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นนามธรรม กฎเกณฑ์ ครูจึงไม่สามารถสื่อสารความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนโดยการให้ความหมายหรือนำเสนอบทนิยามแต่สามารถจัดเตรียมสถานการณ์หรือตัวอย่างที่เหมาะสมให้กับผู้เรียน (Skemp,1987) นักเรียนจะต้องพึ่งพาตนเองในการสร้างความคิดรวบยอดเพราะการที่นักเรียนพยายามจดจำความคิดรวบยอดเชิงนิยามนั้นเป็นวิธีการที่ทำให้นักเรียนเกิดความยุ่งยากในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (Tall, 2001)

การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ในประเทศไทยมุ่งเน้นการสอนเนื้อหา ทักษะการคำนวณโดยการบอกวิธีทำ ให้ตัวอย่างและมุ่งให้นักเรียนทำตามตัวอย่างโดยไม่เปิดโอกาสให้นักเรียนเรียนรู้ด้วยตนเอง (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2555) โดยเฉพาะชั้นเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย การจัดการเรียนการสอนส่วนใหญ่เน้นการท่องจำ กฎ สูตร ทฤษฎี เพื่อการสอบวัดผลสัมฤทธิ์และการสอบเข้ามหาวิทยาลัยมากกว่าเน้นกระบวนการเรียนรู้ของนักเรียน (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษา ขั้นพื้นฐาน, 2550) จากสภาพการณ์ของชั้นเรียนไทย

โดยส่วนใหญ่การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์จะเน้นการสอนความรู้และทักษะในการคิดคำนวณเป็นหลักซึ่งจุดเน้นดังกล่าวยังไม่สอดคล้องกับการจัดการเรียนการสอนในปัจจุบัน ครูส่วนมากยังคงใช้รูปแบบการสอนแบบเดิมๆ บทบาทของครูจึงเป็นเพียงผู้บรรยาย ผู้บอก ผู้สาธิตเนื้อหาทางคณิตศาสตร์อันก่อให้เกิดการเรียนรู้ของนักเรียนที่มองเฉพาะผลลัพธ์ไม่ได้เน้นกระบวนการให้นักเรียนได้แสวงหาความรู้ด้วยตนเองซึ่งเป็นการมองข้ามกระบวนการเรียนรู้และทัศนคติของนักเรียนที่จะนำนักเรียนไปสู่การเรียนรู้ด้วยความเข้าใจ (Inprasitha, 2006) การสอนคณิตศาสตร์ที่เนื้อหาส่วนใหญ่เป็นกฎ สูตร และหลักการทางคณิตศาสตร์การให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดจำนวนมากเพื่อให้จำเนื้อหาเหล่านั้นให้ได้เป็นเพียงการสอนคณิตศาสตร์ที่เทียบได้กับการบอกคณิตศาสตร์เท่านั้น (ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2546)

การสอนคณิตศาสตร์เพื่อที่จะนำพาสาระทางคณิตศาสตร์ไปสู่ความเข้าใจ การคิดและการแก้ปัญหาของนักเรียนเป็นเรื่องที่มีความสำคัญ การสอนจะต้องมีวิธีการสอนที่ถูกต้องและวิธีการสอนที่ถูกต้องจะทำให้คุณภาพการสอนคณิตศาสตร์ประสบความสำเร็จ (กนก วงษ์ตระหง่าน, 2552) การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดกระบวนเรียนรู้ ในรายวิชาคณิตศาสตร์ผู้สอนจำเป็นต้องอาศัยนวัตกรรมใหม่ๆมาใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน เช่น การใช้สถานการณ์ปัญหาปลายเปิด (Open - ended Problems) ซึ่งจะสามารถดึงกระบวนการทางคณิตศาสตร์ออกมาจากนักเรียนได้มากและสามารถนำนักเรียนไปสู่การค้นพบ กฎ สูตรและหลักการทางคณิตศาสตร์ด้วยตัวของนักเรียนเอง (ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2546)

วิธีการแบบเปิด (Open Approach) เป็นวิธีการสอนที่ครูนำเสนอสถานการณ์ปัญหาปลายเปิดให้กับนักเรียน ซึ่งเป็นปัญหาที่ไม่ได้มีเพียงคำตอบเดียวหรือวิธีการแก้ปัญหาเพียงวิธีเดียวและครูอาศัยวิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหาเพื่อเตรียมประสบการณ์ในการค้นพบสิ่งใหม่โดยการรวบรวมความรู้ ทักษะ กระบวนการและวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากประสบการณ์เดิมของนักเรียน (Becker & Shimada, 1997) การสอนด้วยวิธีการแบบเปิดมีจุดเด่นคือ การที่นักเรียนเข้าร่วมในบทเรียนอย่างกระตือรือร้นและเสนอแนวคิดของตัวเองมากขึ้น นักเรียนมีโอกาสในการใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์และทักษะที่ครอบคลุมมากขึ้น นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่มีความหมายด้วยตนเอง (Sawada,1997) จะเห็นว่า ลักษณะของชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิด เพิ่มโอกาสให้นักเรียนแสดงแนวคิดที่หลากหลายในการแก้ปัญหา มีการอภิปรายเกี่ยวกับแนวคิดของตนเองและพัฒนาแนวคิดผ่านการเรียนรู้ร่วมกับเพื่อนในชั้นเรียนสอดคล้องกับแนวคิดของ Takahashi (2006) กล่าวว่า นักเรียนจะสามารถเรียนรู้แนวคิดอื่นๆได้จากแนวคิดของเพื่อนร่วมชั้นเรียนและแนวคิดของ Derry (1996 อ้างถึงใน มงคล ประเสริฐสังฆ์, 2551) กล่าวว่า การที่นักเรียนเข้าร่วมกิจกรรมในชั้นเรียนจะมีผลทำให้นักเรียนสามารถสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ทีละนิดจนกระทั่งเกิดเป็นโครงสร้างที่แข็งแรง

แนวคิดเรื่องเลขยกกำลังเป็นแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญมีบทบาทอย่างมากในการเรียนคณิตศาสตร์ขั้นสูงแต่ยังเป็นปัญหาและเกิดความยุ่งยากสำหรับนักเรียน (Weber, 2002) ซึ่งจากการสัมภาษณ์ครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้คำถามปลายเปิดเพื่อต้องการทราบเนื้อหาใดที่นักเรียนมีความบกพร่องมากที่สุดพบว่า เลขยกกำลัง เป็นเรื่องหนึ่งที่นักเรียนมีข้อบกพร่องอยู่มาก (ขวัญใจ สายสุวรรณ, 2554) สอดคล้องกับผลการวิจัยของ กำจร มุณีแก้ว (2552) ทำการศึกษาความรู้พื้นฐานวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เลขยกกำลัง พบว่านิสิตมีข้อบกพร่องในเรื่องสมบัติต่างๆของเลขยกกำลัง ความหมายของเลขยกกำลัง การใช้เลขยกกำลังแสดงจำนวน และการดำเนินการของเลขยก

กำลัง เนื่องจากนักเรียนบางส่วนเรียนรู้เกี่ยวกับเลขยกกำลังโดยการจดจำกฎ สูตร วิธีคำนวณซึ่งนักเรียนไม่ได้มีความเข้าใจอย่างแท้จริงเกี่ยวกับการดำเนินการของเลขยกกำลัง (Wagner & Parker, 1993) จากประเด็นที่กล่าวมาข้างต้นผู้วิจัยจึงสนใจศึกษากระบวนการสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง เลขยกกำลัง ในชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิด ซึ่งชั้นเรียนนี้นักเรียนไม่มีประสบการณ์ในชั้นเรียนที่จัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการแบบเปิดมาก่อน ประโยชน์ของการวิจัยจะช่วยให้ครูได้เข้าใจกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนซึ่งมีความสำคัญต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับสูงต่อไป และเป็นแนวทางที่สามารถพัฒนาการจัดการเรียนการสอนเรื่อง เลขยกกำลัง

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษากระบวนการสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง เลขยกกำลัง ในชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิด

ขอบเขตของการวิจัย

บริบทชั้นเรียนที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้คือ ชั้นเรียนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 จัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการแบบเปิดตามแนวคิดของ Inprasitha (2010) ซึ่งชั้นเรียนนี้นักเรียนไม่มีประสบการณ์ในการเรียนการสอนด้วยวิธีการแบบเปิดมาก่อน ผู้วิจัยนำวิธีการแบบเปิดมาใช้ตั้งแต่ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2557 กลุ่มเป้าหมาย คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนผดุงนารี จังหวัดมหาสารคาม จำนวน 6 คน (3 คู่) ขอบเขตเนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้คือเรื่อง เลขยกกำลัง ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เนื้อหายึดตามหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เล่ม 3 (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี [สสวท.], 2555)

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บข้อมูล

1.1 แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เลขยกกำลัง จำนวน 6 แผน 6 ชั่วโมง

1.2 เครื่องบันทึกวีดิทัศน์

ใช้บันทึกภาพและเสียงของนักเรียนตลอดทั้งกิจกรรมการเรียนการสอนและผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้จากการบันทึกวีดิทัศน์ในรูปของภาพและเสียงมาถอดคำพูดเป็นข้อความในรูป โพรโทคอล เพื่อใช้สำหรับการวิเคราะห์ข้อมูล

1.3 เครื่องบันทึกภาพนิ่ง

ใช้บันทึกภาพขณะที่นักเรียนแสดงพฤติกรรมต่างๆ ระหว่างการเรียนการสอนและบันทึกภาพผลงานของนักเรียน

1.4 เครื่องบันทึกเสียง

ใช้บันทึกเสียงของนักเรียนระหว่างการจัดการเรียนการสอนและการสัมภาษณ์หลังการจัดการเรียนสอน ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้มาจัดทำโพรโทคอลเพื่อใช้ประกอบการวิเคราะห์ข้อมูล

1.5 แบบบันทึกการสัมภาษณ์เชิงลึก

ใช้บันทึกการสัมภาษณ์นักเรียนหลังการจัดการเรียนการสอนเพื่อตรวจสอบความเข้าใจและค้นหาหลักฐานที่แสดงถึงกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกี่ยวกับเรื่อง เลขยกกำลัง

2. ข้อมูลที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์

2.1 ผลงานเขียนของนักเรียน ซึ่งบันทึกวิธีการ แนวคิดต่างๆ จากการแก้ปัญหาปลายเปิดกระดาษทดของนักเรียนเพื่อใช้เป็นเหตุผลสนับสนุนแนวคิดในการแก้ปัญหา

2.2 โพรโทคอลการแก้ปัญหาของนักเรียน เป็นข้อมูลที่ได้จากเครื่องบันทึกวีดิทัศน์ซึ่ง

บันทึกพฤติกรรมของนักเรียนตลอดการจัดการเรียนการสอนและนำข้อมูลมาถอดคำพูดเป็นข้อความ เรียกว่า โพรโทคอล เพื่อให้เห็นรายละเอียดในขณะที่นักเรียนแก้ปัญหา อภิปรายผล และสรุปเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์

2.3 โพรโทคอลการสัมภาษณ์เชิงลึกนักเรียน เป็นข้อมูลที่ได้จากการถอดคำพูดจากเทปเสียงและแบบบันทึกการสัมภาษณ์นักเรียนหลังการจัดการเรียนรู้ จัดทำเป็นโพรโทคอลเพื่อสนับสนุนการวิเคราะห์ข้อมูลจากโพรโทคอลการแก้ปัญหาและผลงานของนักเรียน

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ วิเคราะห์ข้อมูลโดยการวิเคราะห์โพรโทคอลและนำเสนอข้อมูลแบบการบรรยายเชิงวิเคราะห์ โดยผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. การดำเนินงานก่อนเก็บข้อมูล

1.1 ผู้วิจัยศึกษาบริบทของโรงเรียนพื้นที่วิจัยเกี่ยวกับรูปแบบการจัดการเรียนการสอนของครู พฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน สอบถามปัญหาต่างๆ ที่พบในการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 จากครูผู้สอนรายวิชาคณิตศาสตร์

1.2 ผู้วิจัยปฏิบัติการสอนในรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติมระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยนำวิธีการแบบเปิดมาใช้จัดการเรียนการสอน ซึ่งเป็นวิธีการสอนที่เน้นการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เปิดโอกาสให้นักเรียนได้อภิปรายภายในกลุ่มย่อยและทั้งชั้นเรียน

1.3 การคัดเลือกกลุ่มเป้าหมาย

กลุ่มเป้าหมายในการวิจัยนี้คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5/13 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2557 โรงเรียนผดุงนารี อำเภอเมืองจังหวัดมหาสารคาม จำนวน 6 คน แบ่งเป็น 3 คู่คัดเลือกจากการสังเกตชั้นเรียนโดยพิจารณาเลือกนักเรียนที่สามารถทำงานร่วมกัน แลกเปลี่ยนแสดงความคิดเห็นร่วมกันในการแก้ปัญหาปลายเปิด สามารถเขียนอธิบายแนวคิดของตนเองในการแก้ปัญหา มีความกล้าที่จะอภิปรายแนวคิดต่อชั้นเรียน

1.4 ผู้วิจัยสร้างเครื่องมือวิจัย คือ แผนการจัดการเรียนรู้เรื่อง เลขยกกำลัง ร่วมกับผู้ช่วยวิจัยจำนวน 3 คน ดำเนินการศึกษาเอกสารเกี่ยวกับแนวคิดการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ที่ใช้วิธีการแบบเปิดและศึกษาขอบเขตของเนื้อหาเรื่องเลขยกกำลังซึ่งยึดตามหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เล่ม 3 สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) เพื่อออกแบบกิจกรรมและสร้างปัญหาปลายเปิดตามแนวคิดชนิดปัญหาปลายเปิดของ Becker & Shimada (1997) เพื่อให้เป็นปัญหาที่มีกระบวนการเปิดมีแนวคิดในการแก้ปัญหาที่หลากหลายวิธี ผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยคาดการณ์แนวคิดของนักเรียนที่จะตอบสนองต่อคำสั่งในสถานการณ์ปัญหาและเตรียมคำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนได้อธิบายถึงความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของตนเอง จัดเตรียมสื่อเพื่อส่งเสริมความเข้าใจของนักเรียน โดยในการวิจัยครั้งนี้แผนการจัดการเรียนรู้ได้รับการดูแลให้คำแนะนำจากอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์และตรวจสอบจากผู้เชี่ยวชาญทางด้านคณิตศาสตรศึกษา มหาวิทยาลัยขอนแก่น

2. การดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล

2.1 ผู้วิจัยจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการแบบเปิดโดยอาศัยแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เลขยกกำลัง จำนวน 6 แผน 6 ชั่วโมง ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2557 โรงเรียนผดุงนารี จังหวัดมหาสารคาม ระหว่างการเรียนการสอน นักเรียนแก้ปัญหาด้วยตนเอง ผู้วิจัยสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน บันทึกแนวคิดหรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนโดยไม่แทรกแซงและผู้ช่วยวิจัยบันทึกวีดิทัศน์พฤติกรรมการเรียนรู้ของ

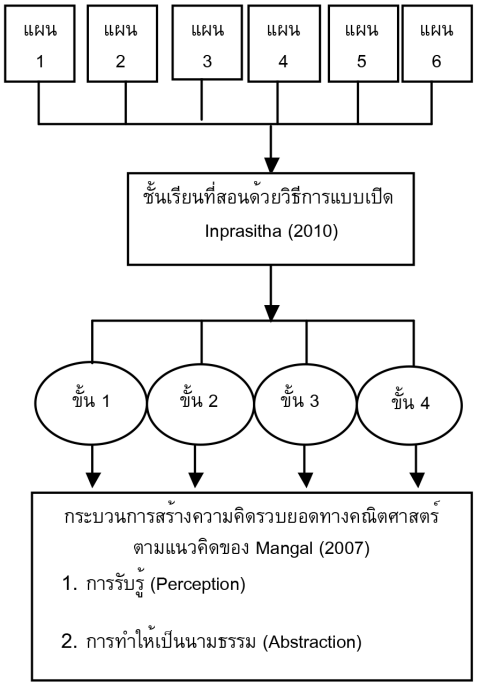
นักเรียนกลุ่มเป้าหมายตลอดการจัดการเรียนการสอน

2.2 ผู้วิจัยสัมภาษณ์เชิงลึกนักเรียนกลุ่มเป้าหมายหลังจากกิจกรรมการเรียนการสอน เพื่อค้นหาหลักฐานเกี่ยวกับความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์เรื่อง เลขยกกำลังและความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกี่ยวกับวิธีการแก้ปัญหาของเพื่อนที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน โดยการใช้คำถาม “อะไร” “ทำไม” “อย่างไร” ให้นักเรียนอธิบายแนวคิดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของตนเองในผลงานที่ได้มาจากการทำกิจกรรมซึ่งอยู่ในรูปแบบของข้อความ รูปภาพ และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

2.3 ผู้วิจัยนำข้อมูลจากการสัมภาษณ์เชิงลึกนักเรียนและข้อมูลจากเครื่องบันทึกวีดิทัศน์มาถอดคำพูดและพฤติกรรมจัดทำเป็นโพรโทคอลเพื่อใช้ในกาวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลในการศึกษาครั้งนี้ นำข้อมูลที่ได้จากโพรโทคอลการแก้ปัญหาของนักเรียน โพรโทคอลการสัมภาษณ์เชิงลึกนักเรียน และ ผลงานของนักเรียนในแผนการเรียนรู้จำนวน 6 แผนมาวิเคราะห์กระบวนการสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเรื่อง เลขยกกำลังที่เกิดขึ้นในแต่ละขั้นตอนของวิธีการแบบเปิด ตามกรอบแนวคิดของ Mangal (2007) แล้วนำเสนอข้อมูลในรูปแบบการบรรยายเชิงวิเคราะห์โดยมีโครงสร้างการวิเคราะห์ข้อมูลดังภาพประกอบ 1



ภาพประกอบ 1 แสดงแผนภาพการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการวิจัย

จากการที่ผู้วิจัยจัดการเรียนการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้โดยอาศัยการสอนด้วยวิธีการแบบเปิดเรื่อง เลขยกกำลัง จำนวน 6 แผน 6 ชั่วโมงเพื่อศึกษากระบวนการสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตามกรอบแนวคิดของ Mangal (2007) มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 กิจกรรมพับกระดาษ เป้าหมายของบทเรียนคือ นักเรียนสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนครั้งที่พับกับจำนวนช่องที่เกิดขึ้นได้และมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความหมายของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

ขั้นที่ 1 การนำเสนอปัญหาปลายเปิด

ปัญหาที่ 1 “พับครึ่งกระดาษ 5 ครั้ง จะมีจำนวนช่องที่เกิดจากการพับในแต่ละครั้งจำนวนเท่าใด”

คำสั่ง 1. ให้นักเรียนพับครึ่งกระดาษ 5 ครั้ง พร้อมทั้งบันทึกจำนวนช่องที่เกิดจากการพับในแต่ละครั้ง

2. ให้นักเรียนพิจารณาหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนครั้งที่พับและจำนวนช่องที่เกิดขึ้น

ขั้นที่ 2 การเรียนรู้ด้วยตนเองของนักเรียน

1. **การรับรู้** นักเรียนอ่านสถานการณ์ปัญหา ดำเนินการพับกระดาษ บันทึกข้อมูลจำนวนครั้งที่พับและจำนวนช่องที่เกิดจากการพับในแต่ละครั้ง ดังโพรโทคอลต่อไปนี้

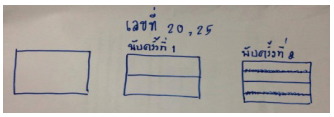
เตย ครั้งที่ 1 ได้เท่าไหร่
ฟาง มันแบ่งครึ่งได้ 2 ช่อง (ใช้มือชี้แสดงว่ากระดาษ A4 ถูกแบ่งเป็น 2 ช่อง)
เตย (พับครึ่งกระดาษ) เออใช่ มันแบ่งครึ่งเป็น 2 ช่อง
ฟาง พับครั้งที่ 2 (พับครึ่งจากกระดาษที่พับครึ่งแล้ว 1 ครั้ง)
เตย ได้เท่าไหร่ เดี๋ยวเขาเป็นคนเขียน
ฟาง (คลี่กระดาษชี้เพื่อนับช่อง) มันแบ่งเป็น 4 ช่อง)

2. **การทำให้เป็นนามธรรม** นักเรียนสังเคราะห์ลักษณะร่วมของจำนวนช่องที่เกิดจากการพับครึ่งกระดาษ ดังโพรโทคอลต่อไปนี้

ฟาง มันจะเป็นอย่างงี้รึเปล่าจาก 4 ไป 8 เพราะ พับครึ่งมันจะถูกแบ่ง ช่องมันก็จะถูกแบ่งไปเรื่อยๆ ถ้าเราพับครึ่งไปเรื่อยๆ
เตย ยังไง
ฟาง นี่ไง (ชี้ให้ดูรอยพับ)
เตย จาก 4 ช่องพับครึ่งอีก ช่องเดิมมันก็ถูกแบ่งก็เป็น 8 ใช่ไหม
เตย ลองพับอีกๆ ต่อไปครั้งที่ 4
ฟาง (พับครึ่งครั้งที่ 4)
เตย ได้ 16 ช่องรึเปล่าจาก 8 เป็น 16
ฟาง น่าจะ (คลี่กระดาษ ชี้เพื่อนับจำนวนช่อง) ได้ 16

ตัวอย่างโพรโทคอลจากการสัมภาษณ์นักเรียน

ครู ดูจากผลงานของเราในการพับกระดาษพวกเราสังเกตเห็นอะไรบ้าง ถ้าพับครึ่ง
ฟาง จะมีรอยแบ่ง A4 ออกเป็น 2 ช่อง
ครู เราพูดว่าถ้าพับครึ่งจะมีรอยพับ ถ้าพับครึ่งอีก ซึ่งมันก็คือพับครึ่งครั้งที่ 2 พวกเราเห็นอะไร
ฟาง เห็นว่ามี 4 ช่อง
ครู แล้วเห็นอะไรอีก
เตย เห็นว่า มันแบ่งครึ่ง
ครู อะไรมาแบ่งครึ่ง
ฟาง มันก็จะเป็นแบบนี้(วาดรูป) ถ้าพับครั้งที่ 2 พับครึ่งจะมีรอย 2 รอยแบ่ง ช่องอันเดิม



ครู อ่อ ถ้าพับครั้งที่ 3 มันจะเป็นยังไง
เตย มันก็จะแบ่งไปเรื่อยๆ พอพับครึ่งก็จะเกิดรอยพับอย่างอันนี้จาก 4 ช่อง มันก็ถูกแบ่งก็เป็น 8

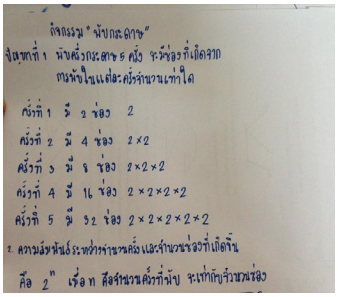
จากโพรโทคอลการสัมภาษณ์ข้างต้นแสดงให้เห็นว่านักเรียนได้ตระหนักถึงลักษณะร่วมของรอยพับและจำนวนช่องที่เกิดจากการพับกระดาษ

3. การทำให้เป็นกฎเกณฑ์ทั่วไป นักเรียนรวบรวมลักษณะร่วมของจำนวนช่องที่เกิดจากการพับครึ่งกระดาษแต่ละครั้งและสรุปความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนครั้งที่พับและจำนวนช่องที่เกิดขึ้น ดังโพรโทคอลต่อไปนี้

เตย จำนวนช่องจะเป็นถ้าเอา 2 ไปคูณกับครั้งก่อนหน้าจะได้ช่องครั้งต่อไปใช่ไหม
ฟาง เพราะว่า เราพับครึ่งกระดาษแบ่งเป็น 2 ช่องใช่ไหม พับครึ่งอีกก็จะถูกแบ่งครึ่งอีก ก็เหมือนเอา 2 ไปคูณครั้งก่อนหน้าก็ได้ช่องครั้งถัดไป มันน่าจะเป็นแบบนี้ไปเรื่อยๆ หรือจะว่ายังไงดี
เตย อ่อ นี่ไง 4 ก็คือ แล้ว 8 ก็ 2 คูณกัน 3 ตัว 16 ก็ 2 คูณกัน 4 ตัว 32 ก็ 2 คูณ 5 ตัว ถูกไหม 2 เพิ่มขึ้นทีละตัว
ฟาง ความสัมพันธ์ของ 2 คูณ
เตย เป็น 2 ยกกำลังไง
ฟาง เอ่อ มันเขียนเป็นเลขยกกำลังได้
เตย 2 ยกกำลัง
ฟาง เป็นอะไร
เตย ครั้งที่พับ

ฟาง จำนวนช่องเท่ากับ 2 กำลังครั้งที่พับ 2 กำลัง 32 คือ 2 คูณ 5 ตัวก็คือ, 16, 8 ความสัมพันธ์ถูกแล้ว

เตย



จากโพรโทคอลและภาพผลงานเขียนแสดงให้เห็นว่านักเรียนรวบรวมลักษณะร่วมของจำนวนช่องที่เกิดจากการพับครึ่งกระดาษแต่ละครั้งโดยอาศัยแนวคิดเรื่องการคูณช่วยในการแก้ปัญหาและสรุปความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนครั้งที่พับและจำนวนช่องที่เกิดขึ้นจากการพับกระดาษเขียนอยู่ในรูปเลขยกกำลัง คือ เท่ากับจำนวนช่อง เมื่อ *n* คือจำนวนครั้งที่พับ

ขั้นที่ 3 การอภิปรายและเปรียบเทียบแนวคิดร่วมกันทั้งชั้นเรียน

นักเรียนนำเสนอแนวคิดในการแก้ปัญหาเป็นคู่หน้าชั้นเรียนเพื่อให้นักเรียนทุกคนเกิดการเรียนรู้จากแนวคิดของเพื่อน ครูตั้งคำถามเพื่อให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเปรียบเทียบแนวคิดที่เกิดขึ้นในขั้นเรียน

ขั้นที่ 4 การสรุปโดยการเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน

ครูตั้งคำถามเพื่อให้นักเรียนสรุปและเชื่อมโยงไปสู่บทนิยามของเลขยกกำลังจากแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน ดังโพรโทคอลต่อไปนี้

ฟาง เพราะว่าจากที่เราพับกระดาษ เราจะเห็นว่าจำนวนช่องเพิ่มขึ้นใช่ไหมคะ จากพับครึ่งแรกได้ 2 ช่อง พับครึ่งต่อไปอีกก็มีรอยไปแบ่งครึ่งช่องเดิมอีก ก็จะได้ช่องมันจะเพิ่มขึ้นใช่ไหมคะ เพิ่มเป็น 2 เท่า มันก็คือ เป็นแบบนี้เรื่อยๆ เราก็สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเลขยกกำลังค่ะ

ครู เพื่อนพยายามจะบอกว่า จำนวนครั้งที่พับกับจำนวนช่องมันเพิ่มขึ้นอย่างไร

นร เป็น 2 เท่า

ครู เป็น 2 เท่าและจากจำนวนช่องเพื่อนก็มองเห็นว่าสามารถเขียนอยู่ในการคูณเป็น 2 คูณกันหรือสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง

ครู เรื่องนี้เราสามารถเชื่อมโยงไปสู่ความหมายของเลขยกกำลังได้ใช่ไหม

นร. ได้

ครู ตรงไหนที่เราเชื่อมโยงได้

กิ๊ฟ 2 คูณ 2 ไปเรื่อยๆ ก็เป็น

ครู เพื่อนบอกว่า 2 คูณ 2 ไปเรื่อยๆ ตัวอย่างความสัมพันธ์ที่เราหาได้คือ อันนี้หมายความว่ายังไง

นร. 2 คูณกัน n ตัว

ครู โอเค ถ้าจะสรุปความหมายของเลขยกกำลังเป็นกรณีทั่วไป นักเรียนสามารถสรุปได้อย่างไร

เตย มอง 2 เป็น a

นร a กำลัง เท่ากับ a คูณกัน ตัว

ครู ขอตัวแทนออกมาเขียนบนกระดาษ

แนท $a^n = a \times a \times a \cdots \times a$ (*n* ตัว)

จากโพรโทคอลข้างต้นจะเห็นว่า นักเรียนสามารถอธิบายกระบวนการค้นหาความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ของจำนวนครั้งที่พับและจำนวนช่องที่เกิดจากการพับกระดาษ จนกระทั่งสรุปเป็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนครั้งที่พับและจำนวนช่องที่เกิดขึ้นและนักเรียนสามารถเชื่อมโยงแนวคิดที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนไปสู่บทนิยามของเลขยกกำลังด้วยตนเอง

อภิปรายผลการวิจัย

จากการศึกษากระบวนการสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง เลขยกกำลัง ในชั้นเรียนที่สอนด้วยวิธีการแบบเปิด นักเรียนสร้างความคิด

รวบยอดทางคณิตศาสตร์ขึ้นในขั้นการเรียนรู้ด้วยตนเองขณะแก้ปัญหาปลายเปิดโดยนักเรียนพยายามแสดงแนวคิดที่หลากหลายในการแก้ปัญหา ดำเนินการกับสื่อหรือการคำนวณเชิงสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์โดยอาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์จากประสบการณ์เดิมเพื่อค้นหาแนวทางการแก้ปัญหา นักเรียนตระหนักถึงลักษณะร่วมของเลขยกกำลังจากแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหา จนกระทั่งสามารถสรุปเป็นกฎ สูตร วิธีการทางคณิตศาสตร์ทำให้เกิดความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเรื่อง เลขยกกำลัง ซึ่งความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นสอดคล้องกับแนวคิดของ Vinner (1991) มี 2 ประเภทดังนี้ 1) Concept Definition คือ การให้ความหมายทางคณิตศาสตร์ที่มีความถูกต้องและเป็นทางการซึ่งอาจแสดงในรูปของคำหรือข้อความ เช่น ความหมายของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นบวกและจำนวนตรรกยะ และ 2) Concept Image คือ ความคิดรวบยอดที่สามารถพัฒนาไปสู่ข้อสรุป หลักการ และสุดท้ายอาจกลายเป็นกฎหรือทฤษฎีบทของข้อความรู้นั้นๆ ต่อไป เช่น ความคิดรวบยอดเรื่องการคูณเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

ขั้นการอภิปรายและเปรียบเทียบแนวคิดร่วมกันทั้งชั้นเรียนและขั้นการสรุปโดยการเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงแนวคิดของตนเองเพื่อตรวจสอบความเข้าใจต่อแนวคิดในการแก้ปัญหา ครูมีส่วนร่วมในการตั้งคำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนได้อธิบายและเรียนรู้แนวคิดของเพื่อนในชั้นเรียน ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ถูกสร้างขึ้นด้วยตนเองสอดคล้องกับ Takahashi (2006) กล่าวว่านักเรียนจะสามารถเรียนรู้แนวคิดอื่นๆ ได้จากแนวคิดของเพื่อนร่วมชั้นเรียนและ Derry (1996 อ้างถึงใน มงคล ประเสริฐสังฆ์, 2551) กล่าวว่า การที่นักเรียนเข้าร่วมกิจกรรมในชั้นเรียนจะมีผลทำให้นักเรียนสามารถสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ทีละนิดจนกระทั่งเกิดเป็นโครงสร้างที่แข็งแรง

จากการวิเคราะห์ข้อมูลพบว่านักเรียนสร้างความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการคูณ การหารเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวกและสมบัติต่างๆ ของเลขยกกำลังโดยอาศัยความคิดรวบยอดเรื่องการคูณและความหมายของเลขยกกำลังเป็นพื้นฐานสอดคล้องกับแนวคิดของ Skemp (1987) กล่าวว่า ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์สามารถสร้างขึ้นโดยอาศัยความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์อื่นๆ เป็นพื้นฐาน

สรุปผล

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลจากแผนการจัดการเรียนรู้จำนวน 6 แผน พบกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเรื่อง เลขยกกำลัง ตามกรอบแนวคิดของ Mangal มี 3 ขั้นตอนสำคัญ ดังนี้

1. การรับรู้ นักเรียนรับรู้ปัญหาผ่านการอ่านสถานการณ์ปัญหา กระทำกับสื่อหรือการคำนวณเชิงสัญลักษณ์ วิเคราะห์ปัญหาและ คาดการณ์คำตอบอย่างคร่าวๆ ทำให้นักเรียนมีข้อมูลเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับเลขยกกำลัง

2. การทำให้เป็นนามธรรม นักเรียนเปรียบเทียบความเหมือน ความแตกต่างของเลข ยกกำลังและแนวคิดต่างๆ ที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหา และพยายามสังเคราะห์คุณสมบัติร่วมของเลขยกกำลังเพื่อค้นหาคำตอบของปัญหา

3. การทำการทำให้เป็นกฎเกณฑ์ทั่วไป นักเรียนรวบรวมคุณสมบัติต่างๆ ของเลขยกกำลังบนพื้นฐานของความคล้ายคลึงกันและสรุปเป็นนิยาม กฎ สูตรหรือวิธีการทางคณิตศาสตร์

จากการวิเคราะห์ข้อมูลพบว่าการสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง เลขยกกำลัง จะอาศัยความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์เรื่องอื่นๆ ที่ได้จากประสบการณ์เดิมของนักเรียน เช่น ความคิดรวบยอดเรื่องการคูณเป็นพื้นฐานการ

สร้างความคิดรวบยอดเรื่องความหมายของเลขยกกำลัง เป็นต้น

การจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการแบบเปิด นักเรียนเรียนรู้ด้วยตนเองผ่านการแก้ปัญหาปลายเปิด การอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียน จนกระทั่งนำไปสู่การสรุปเป็นบทนิยาม กฎ สูตรและหลักการทางคณิตศาสตร์ทำให้เกิดความคิดรวบยอดด้วยตนเอง

ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรมีการศึกษาสถานการณ์ปัญหาที่ส่งเสริมกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

2. ควรมีการศึกษาบทบาทของครูในการส่งเสริมกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

กิตติกรรมประกาศ

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เกียรติ แสงอรุณและอาจารย์ ดร. สมควร สีชมภู อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนจากสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) และศูนย์วิจัยคณิตศาสตรศึกษา มหาวิทยาลัยขอนแก่น

เอกสารอ้างอิง

กนก วงษ์ตระหง่าน. (2552). *วิธีการสอนกับการพัฒนาคุณภาพการศึกษา.* เอกสารประกอบการอบรมเชิงปฏิบัติการในโครงการพัฒนาวิชาชีพครูคณิตศาสตร์ด้วยนวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด, คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

กำจร มุณีแก้ว. (2552). *การพัฒนาชุดความรู้พื้นฐานเลขยกกำลัง.* กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา.

ขวัญใจ สายสุวรรณ. (2554). *การสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยจุดบกพร่องในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเลขยกกำลัง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1.* (วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิจัยและประเมินผลการศึกษา). มหาสารคาม: บัณฑิตวิทยาลัยมหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม.

มงคล ประเสริฐสังฆ์. (2251). *การศึกษาโครงสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง พาราโบลาโดยใช้รูปแบบการจัดการเรียนรู้ 5Es.* (วิทยานิพนธ์ ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตรศึกษา). ขอนแก่น: บัณฑิตวิทยาลัยมหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์และคณะ. (2546). *การปฏิรูปกระบวนการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ในโรงเรียนโดยเน้นกระบวนการทางคณิตศาสตร์.* ขอนแก่น: ขอนแก่นการพิมพ์.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555). *ครูคณิตศาสตร์มืออาชีพ เส้นทางสู่ความสำเร็จ*. กรุงเทพฯ: 3 – คิว มีเดีย.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555). *หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6.* กรุงเทพฯ: องค์การค้า สกสค.

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน. (2550). เทคนิคการสอนแบบ Math League พัฒนาการเรียนรู้ ได้อย่างไร. *วารสารวิชาการ*, 10(2), 40 – 43.

อัมพร ม้าคะนอง. (2552). *รายงานการวิจัย เรื่อง การพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการได้มาซึ่งมโนทัศน์และคำถามระดับสูง.* กรุงเทพฯ: คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

Inprasitha, M. (2010). One feature of adaptive lesson study in Thailand – Designing learning unit. *Proceedings of the 45th Korean National Meeting of Mathematics Education.* Gyeongju: Dongkook University. 193 – 206.

Inprasitha, M. (2006). Open-ended Approach and Teacher Education. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*, (25), 169 – 177.

Mangal, S.K. (2007). *Essential of educational psychology*. New Delhi: Prentice – Hall of Ideia Private Limited.

Sawada, T. (1997). Developing Lesson Plans . In Shimada, S. & Becker, J.P. (Eds.). *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Shimada, S. & Becker, J.P. (Eds.). (1997). The Significance of an Open-Ended Approach. *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics.* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Skemp, R.R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics*. New Jersey: Lawrence.

Weber, K.H. (2002). Students' Understanding of exponential and logarithmic functions. *Proceeding of the 2nd international conference on the teaching of mathematics.* Crete: University of Crete. 181 – 190.

Tall, D. (2001). Cognitive Development in Advanced Mathematics Using Technology. *Mathematics Education Research Journal*, 12(3), 196 – 218.

Takahashi, A. (2006). Characteristics of Japanese mathematics lessons. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*, 25, 37 – 44.

Vinner, S. (1991). Advanced Mathematical Thinking. *The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics*, 5, 65 – 68.

Wagner, S. & Parker, S. (1993). Advancing algebra. In Wilson, P.S. (Eds.). *Research ideas for the classroom high school mathematics.* [n.p.]: Macmillan Library Reference.